Modelli di epidemie

Carlo Andreatta, Mario Puppi

24 ottobre 2017

1 Diffusione della malattia

I parametri del modello SIR sono il coefficiente di trasmissione α, il tasso di rimozione γ, il numero di individui N e il numero iniziale di infetti $I_0, 0 < I_0 \leq N$. Infatti, $S_0 = N - I_0$ mentre $R_0 = 0$.

Domanda 1. *In una situazione epidemica di cui siano noti i parametri* α, γ, N, I_0

- *possiamo prevedere se l'infezione si diffonderà oppure no tra la popolazione?*
- *se la risposta è affermativa, come si svilupperà l'infezione?*
- *quando comincerà la fase di declino dell'infezione (in cui $t \to I_t$ è una funzione decrescente)?*

La variazione del numero di infetti, dal tempo n al tempo $n+1$ è data da $\Delta I(n) = I(n+1) - I(n)$, in particolare il tasso di crescita iniziale dell'infezione è definito da

$$\Delta I(0) = I(1) - I(0) = (I_0 + \alpha S_0 I_0 - \gamma I_0) - (I_0) = (\alpha S_0 - \gamma) I_0$$

Esercizio 1. *Dimostrare che il tasso iniziale di crescita è positivo se e solo se $S_0 > \frac{\gamma}{\alpha}$.*

Esercizio 2. *Dimostrare che se il tasso di crescita iniziale è negativo allora l'infezione è decrescente durante l'intera evoluzione.*

Il tasso iniziale di crescita determina l'evoluzione dell'infezione. Infatti, se vale la condizione $\alpha S_0 - \gamma < 0$, essendo $\Delta S(n) = S(n+1) - S(n) \leq 0$ per ogni n, avremo che

$$\Delta I(n) = (\alpha S_n - \gamma) I_n \leq (\alpha S_0 - \gamma) I_n \leq 0$$

per ogni n.

Esercizio 3. *Se $S_0 > \frac{\gamma}{\alpha}$ allora il tasso di crescita iniziale $\alpha S_0 - \gamma$ è positivo e l'infezione è crescente in un intervallo di tempo iniziale dell'evoluzione. Ne segue che l'epidemia si diffonde nella popolazione.*

Infatti,

$$\Delta I(0) = I(1) - I(0) = (I_0 + \alpha S_0 I_0 - \gamma I_0) - (I_0) = (\alpha S_0 - \gamma) I_0 > 0$$

Adotteremo il termine *epidemico* per dire che esiste uno stato $t > 0$ tale che $I_t > I_0$. Ma se un tale stato esiste allora allora deve essere vera già dallo stato $t = 1$, cioè la diffusione dell'epidemia è riconoscibile fin dall'inizio. Per capire se la malattia si diffonderà è sufficiente verificare che il numero iniziale dei suscettibili S_0 superi la soglia critica $S_c = \frac{\gamma}{\alpha}$. Se $S_0 < S_c$ l'epidemia non si diffonderà.

Definizione 1. *Il parametro critico $\frac{\gamma}{\alpha}$ si chiama tasso di rimozione relativo, mentre il suo reciproco $\sigma = \frac{\alpha}{\gamma}$ è detto tasso di contatto dell'infezione.*

Abbiamo detto che una epidemia si diffonde nella popolazione se $I_t > I_0$ per qualche istante $t > 0$. Questo si verifica sempre se $S_0 > S_c = \frac{\gamma}{\alpha}$ e $I_0 > 0$.

Definizione 2. *Il tasso di riproduzione dell'infezione è dato da $\sigma = \frac{\alpha}{\gamma} S_0$*

Il numero $\frac{1}{\gamma}$ è la durata media dell'infezione per un individuo della popolazione.

Ricavare il tasso di riproduzione è cruciale e può essere piuttosto complicato.

2 Immunità di gregge

Domanda 2. *Supponiamo che un'epidemia che nel passato ha colpito una nazione si possa descrivere con un modello SIR con i parametri $\alpha, \beta, N, I_0, S_0$. Se la popolazione attuale della stessa nazione è stata vaccinata per la stessa malattia e non è cambiato il numero totale di individui, quali dei parametri SIR che descrivono una nuova epidemia sulla popolazione vaccinata cambierà in modo deciso?*

Risposta. La vaccinazione riduce fortemente il parametro S_0 e di conseguenza il tasso di riproduzione dell'infezione σ.

La vaccinazione non ha solo l'effetto di proteggere l'individuo vaccinato. A livello globale ha un effetto di abbassare l'effettivo tasso di riproduzione al di sotto del livello di soglia oltre il quale scatterebbe la diffusione dell'epidemia. E' l'effetto noto come *immunità di gregge*. Una volta che sia stato raggiunto il livello di soglia dell'immunità di gregge per σ e che si perda la memoria delle malattie del passato può accadere che i genitori non vaccinino i loro figli ma nonostante ciò questi siano protetti dall'effetto immunità di gregge.

3 Rapporto tra infetti e suscettibili

La relazione tra le variazioni delle quantità $I(t)$ e $S(t)$ nel tempo t è data da

$$\frac{\Delta I(n)}{\Delta S(n)} = -\frac{(\alpha S_n - \gamma)I_n}{\alpha S_n I_n} = -1 + \frac{\gamma}{\alpha}\frac{1}{S_n}$$

cioè

$$\Delta I(n) + \Delta S(n) = \frac{\gamma}{\alpha}\frac{\Delta S(n)}{S_n}$$

ossia

$$\Delta(I(n) + S(n)) = \frac{\gamma}{\alpha}\frac{\Delta S(n)}{S_n}$$

La quantità $\frac{\Delta S(n)}{S_n}$ coincide proprio con la variazione $\Delta LogS(n)$
Si deduce così l'esistenza di una costante K tale che per ogni n

$$I_n + S_n - \frac{\gamma}{\alpha} log S_n = K$$

Esercizio 4. *In un'epidemia il tasso di riproduzione dell'infezione è* $\sigma = \frac{\alpha}{\gamma} = 6.8$*, il numero iniziale di suscettibili è* $s[0] = \frac{1}{3}$ *il numero iniziale di infetti è* $i_0 = \frac{1}{30}$*. Trovare il parametro costante* K *dell'evoluzione.*

Esercizio 5. *In un'epidemia la funzione* $I(t)$ *tende a 0 per* t *che tende a infinito. Dimostrare che Il numero finale dei suscettibili* S_{fin} *soddisfa*

$$0 + S_{fin} - \frac{1}{c} Log[S_{fin}] == K$$

Ammesso che l'epidemia si diffonderà nella popolazione come possiamo valutarne l'impatto?

Esercizio 6. *Supponiamo che l'evoluzione della malattia sia tale che*

$$\Delta I(n) = (\alpha S_n - \gamma) I_n \leq 0$$

per ogni n.

- *Dimostrare che* $n \to I_n$ *è funzione decrescente del tempo* n
- *Dedurne che la funzione* $n \to I(n)$ *assume il valore massimo quando* $\Delta I(n) = 0$ *equivalente alla condizione* $S(n) = S_c = \frac{\gamma}{\alpha}$.
- *Nell'ipotesi che* $S(n) = S_c = \frac{\gamma}{\alpha}$ *dedurne che il valore massimo della funzione* $n \to I_n$ *è dato da* $I_{max} = N - S_c + S_c log \frac{S_c}{S_0}$

Infatti, $I_{max} = S_c log S_c - S_c + I_0 + S_0 - S_c log S_0 = I_0 + (S_0 - S_c) + S_c log \frac{S_c}{S_0}$

Esercizio 7. *Supponiamo che i parametri iniziali* I_0, S_0 *soddisfino l'ipotesi* $S_0 > S_c$. *Dedurne che la funzione* $n \to I_n$ *è crescente e che l'infezione si diffonderà. Se invece* $S_0 < S_c$ *dimostrare che* $n \to I_n$ *è decrescente dall'istante iniziale e l'epidemia non si diffonderà.*

Esercizio 8. *Dimostrare che in ogni evoluzione dell'epidemia* I_n *converge a 0 per* $n \to \infty$.

Esercizio 9. *Dimostrare che* S_n *è sempre decrescente e che* $\frac{\Delta S_n}{\Delta R_n} = -\frac{\alpha}{\gamma} S_n$. *Dedurne che* $S_n = S_0 e^{\frac{\alpha}{\gamma} R_n}$

4 Un caso di studio

Una popolazione chiusa (non ci sono nascite, morti, immigrazioni o emigrazioni) è composta da N individui. Supponiamo che siano soddisfatte le ipotesi seguenti ad ogni istante di un'epidemia che ha colpito la popolazione:

- Ogni individuo mantiene costante l'interazione con gli altri individui, con frequenza k di incontri nell'unità di tempo con tutti gli altri, anche se è stato infettato
- Tutti gli individui suscettibili sono egualmente esposti all'infezione;
- Tutti gli individui infetti sono egualmente contagiosi;

- Ad ogni incontro a rischio (tra suscettibile e infetto) la probabilità che l'infetto contagi il suscettibile è p
- Un individuo suscettibile che è stato contagiato al tempo t diventerà infetto al tempo $t+1$ e lo rimarrà per tutta la durata dell'epidemia

Questo significa che ci sono solo due stati possibili per un individuo: suscettibile o infetto. Non ci sono mai dei rimossi.

Esercizio 10. *Nelle ipotesi precedenti sull'epidemia della popolazione,*

- *se il numero dei suscettibili all'istante* $t = n$ *è* $S(n)$ *quanti sono gli infetti* $I(n)$*?*
- *qual è il numero medio di contatti a rischio nell'istante* $t = n$ *tenendo conto della frequenza di contatto* k *di ciascun individuo e la probabilità* p *che un incontro a rischio risulti contagioso?*
- *Dimostrare che ad ogni istante* $t = n$ *il numero di nuovi infetti è* $\alpha(I(n)(N - I(n))$. *Quanto vale la costante di proporzionalità* α*? [risposta* $\alpha = kp$ *]*
- *Scrivere l'equazione dell'evoluzione del numero di infetti*
- *Se al posto del numero di infetti* $I(n)$ *all'istante* $t = n$ *usiamo la quantità* $x(n) = I(n)/N$ *che rappresenta la frazione di infetti nella popolazione, dimostrare che l'equazione dell'evoluzione si può scrivere*
$$\Delta x(n) = Ax(n)(1 - x(n))$$
  dove $A = \alpha N$